Коши типтес интегралдардың шеттік мәндерінің қасиеттері

Теорема. *Егер* L *тегіс контур ал* $\varphi(t)$ L*-да* λ *көрсеткіші бойынша Гельдер шартын қанағаттандырса, онда* $\lambda<1$ *болса Коши типтес интегралдың шектік мәндері* $\Phi^{+}(t)$ *және* $\Phi^{-}(t)$*-да дәл сол көрсеткішпен осы шартты қанағаттандырады; егер* $\lambda=1$ *болса,* λ*-дан өте аз шамаға ерекшеленетін көрсеткішпен қанағаттандырады*.

(20) теңдігінен, тұжырымдалған теореманы

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$$

функциясына көрсетсек жеткілікті. Ол үшін кез-келген жақын t_1, t_2 нүктелері үшін

$$|\psi(t_2)-\psi(t_1)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau\right| \tag{50}$$

бағалайық. t_1 нүктесінен L контурын екі a және b нүктелерінде қиятын, радиусы δ болатын шеңберді сырттай сызайық. Осы шеңбердің ішінде жатқан L-дің бөлігін l деп белгілейік. Енді t_2 – l бойындағы a және b-дан өзгеше кез-келген бекітілген нүкте болсын. $\delta=k|t_2-t_1|$ деп алайық. $k>1$ екендігі айқын.

$s=s(t,\tau)$ деп L контурының ұштары t және τ болатын екі доғасының кішісін белгілейік.

L контурының тегіс болу шартынан, кез-келген екі t_1 және t_2 нүктесі үшін

$$s(t_1,t_2)\le m|t_2-t_1|$$

деп жаза аламыз, мұндағы m оң тұрақты.

(50) интегралын келесі түрде өрнектейік:

$$\psi(t_2)-\psi(t_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{t_1-t_2}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{\left(\varphi(\tau)-\varphi(t_2)\right)(t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}d\tau=I_1+I_2+I_3+I_4\,.$$

I_2 үшін

$$\left|I_2\right|\le\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right||\,d\tau\,|<\frac{Am}{2\pi}\int_{l}r^{\lambda-1}\,|\,dr\,|\le$$

$$\le\frac{Am}{\pi}\int_{0}^{\delta}r^{\lambda-1}dr\le A_1\,|\,t_2-t_1\,|^{\lambda}\,.$$

бағалауын аламыз. Мұндағы сандық коэффициенттер – белгілі бір оң тұрақтылар.

Сәйкес жолмен

$$|\,I_1\,|\le A_2\,|\,t_2-t_1\,|^{\lambda}\,.$$

I_3 интегралы үшін бағалауды келесі түрде жүргіземіз:

$$|\,I_3\,|\le\frac{|\,\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\,|}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|\le\frac{A\,|\,t_2-t_1\,|^{\lambda}}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|.$$

Соңғы интегралды тікелей есептейміз, яғни:

$$\int_{L-l} \frac{d\tau}{\tau - t_1} = \ln \frac{a - t_1}{b - t_1}.$$

Сәйкесінше, ол кез-келген t_1 үшін L-да шенелген. Сол себепті келесі бағалауды аламыз

$$|I_3| \le A_3 |t_2 - t_1|^{\lambda}.$$

I_4 интегралын бағалауға көшейік. Гельдер шарты мен

$$|d\tau| = |ds| \le m|dr|,$$

(4.3)[Gahov,35б.] теңсіздігін қолдансақ, мұндағы s контур доғасының ұзындығы, r – оның хордаларын керуінің ұзындығы

$$|I_4| \le A \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi} \int_{L-l} \frac{|d\tau|}{|\tau - t_1||\tau - t_2|^{1-\lambda}} \le$$

$$\le A' |t_2 - t_1| \int_{L-l} |\tau - t_1|^{\lambda - 2} \left| \frac{\tau - t_1}{\tau - t_2} \right|^{1-\lambda} |d\tau|.$$

аламыз. Және

$$|\tau - t_1| \ge \delta = k|t_2 - t_1|$$

болғандықтан,

$$k|\tau - t_2| \ge k\left[|\tau - t_1| - |t_1 - t_2|\right] \ge (k-1)|\tau - t_2|$$

және сәйкесінше,

$$|I_4| \le A'' \left(\frac{k-1}{k} \right)^{1-\lambda} |t_1 - t_2| \int_R^{\delta} r^{\lambda - 2} dr,$$

мұндағы

$$R = \max_{\tau \in L-l} |\tau - t_1|.$$

Егер $\lambda < 1$, онда соңғы интегралды есептесек, келесіні табамыз:

$$|I_4| \le A_4 |t_2 - t_1|^{\lambda}.$$

Егер $\lambda = 1$ болса, онда дәл осы жолмен келесі бағалауды табамыз:

$$|I_4| \le A_4' |t_2 - t_1| \left|\ln |t_2 - t_1|\right|.$$

Енді $|\ln x|$ – $x \to 0$ болғанда, $|x|^{-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$-ның кез-келген теріс дәрежесінен баяу өсетінін ескерсек

$$|I_4| \le A_4' |t_2 - t_1|^{1-\varepsilon}$$

аламыз.

I_1, I_2, I_3 және I_4 үшін бағалауларды өзара қарастырып, және $\lambda = 1$ болғанда I_1, I_2, I_3 бағалауларында λ көрсеткішін $1-\varepsilon$-ға ауыстыра алатынымызды ескерсек, теорема тұжырымының ақиқаттығын аламыз.

Дәлелдеу тұйық контур үшін жасалды. Бірақ теорема тұйық емес контур үшін де дұрыс екендігі шығады.

Коши типтес интегралдың шектік мәндерінің қасиеттері туралы теорема дәлелдеуінен Коши бойынша бас мән мағынасындағы интегралдың келесі **қасиеті** шығады:

Егер $\varphi(t)$ λ көрсеткіші бойынша Гельдер шартын L тұйық контурында қанағаттандырса, онда

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

да осы шартты қанағаттандырады, әрі, егер $\lambda < 1$ болса ұқсас көрсеткішпен, ал

Бұл тұжырым, дәл алдыңғы теоремаға сәйкес, $\varphi(\tau, \zeta)$ тығыздығы ζ параметріне тәуелді болған жағдайға жалпылана алады, және ζ параметрі Гельдер шартын қанағаттандырады. Дербес жағдайда $\zeta = t$ болуы да мүмкін.

Түзусызықты кесулер үшін Риман-Гилбьерт есебі

Көбінесе сызықтық жұптастыру есептері деп аталатын түзу сызықты кесулер үшін қарапайым шекаралық есептерді қарастырайық. L – нақты осьтің $[-a, a]$ кесіндісі бойымен алынған кесу болсын. $L = |x| \le a, y = 0$.

Анықтама. Егер $\Phi(z)$ айнымалы z-тің бүкіл жазықтығында анықталған бірмәнді аналитикалық функциясы кез-келген бағытта z-тің k-ға оң жақ және сол жақтан ұмтылған кезінде $\Phi^{+}(x)$ және шекті $\Phi^{-}(x)$ мәндеріне ие болса, онда функция бөлікті-аналитикалық функция деп аталады, ал $x = \pm a$ нүктесінің аймағында теңсіздік орындалады $\left|\Phi(z)\right| < A\left|z \mp a\right|^{-a}, A > 0, 0 \le a < 1.$ Контурды айналып өтудің оң бағыты үшін x осі бойынша бағытты таңдаймыз.

Есеп. $L \in \left[-a, a\right]$ кесуінде жататын және

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = g(x), \tag{51}$$

шартын қанағаттандыратын, сонымен қатар $g(x)$ функциясы L–да Гёльдер шартын қанағаттандыратын $\Phi(z)$ бөлікті-аналитикалық функцисын табу.

Шешуі. Есепті шешу үшін

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Егер көрсетілген функция белгілі бір тармақты білдірсе, онда L–дан тыс барлық облыста аналитикалық болып табылады. Біз $X(z)$ функциясы z-тің үлкен мәндерінде $1/z$ болатындай тармақты таңдамыз.

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{a^2}{2z^3} + \ldots$$

Онда нақты осьте $\sqrt{z^2 - a^2}$ функциясы:

$$\sqrt{z^2 - a^2} = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - a^2}, x \le -a, y = 0 \\ \pm i\sqrt{.a^2 - x^2}, |x| \le a, y = \pm 0 \\ \sqrt{x^2 - a^2}, x \ge a, y = 0 \end{cases} \tag{52}$$

және L-да $X(z)$ функциясының шекаралық мәндері келесі түрде болады:

$$X^{+}(x) = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$X^{-}(x) = -\frac{1}{i\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$X(z)$ функциясы L–мен қиылысқанда таңбасын өзгертеді және

$$X^{+}(x)+X^{-}(x)=0$$

$$\frac{X^{+}(x)}{X^{-}(x)}=-1$$

Осы амалдарды пайдалана отырып (51) шекаралық шартын мына түрде жазамыз:

$$\Phi^{+}(x)-\frac{X^{+}(x)}{X^{-}(x)}\Phi^{-}(x)=g(x),|x|<a.$$

Теңдіктің екі жағында $X^{+}(z)$–ке бөліп, мынаны аламыз

$$\frac{\Phi^{+}(x)}{X^{+}(x)}-\frac{\Phi^{-}(x)}{X^{-}(x)}=\frac{g(x)}{X^{+}(x)}$$

$$\left[\frac{\Phi(x)}{X(x)}\right]^{+}-\left[\frac{\Phi(x)}{X(x)}\right]^{-}=\frac{g(x)}{X^{+}(x)}$$

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}d\tau+c$$

немесе

$$\Phi^{+}(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)(\tau-z)}d\tau+cX(z)$$

Онда есептің түпкілікті шешімі мына түрде жазылады:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{z^{2}-x^{2}}}\left[\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^{2}-\tau^{2}}\,g(\tau)}{\tau-z}d\tau-2\pi ic\right]$$

Мұндағы c – тұрақты комплекс сан.

Сингулярлы интегралдық теңдеулер.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x), |x| < a, \qquad (53)$$

сингулярлы интегралдық теңдеуінің шешімі болып табылатын $\varphi(x)$ функциясы табу керек. Мұндағы $f(x)$ – берілген функция, ал интеграл Коши типтебасты мәнімен анықталған. Сонымен қатар $\varphi(x)$ және $f(x)$ функциялары $(-a, a)$-да Гёльдер шартын қанағаттандырады деп есептейміз.

Бұл есепті шешу үшін белгісіз $\varphi(t)$ жазықтығында Коши типтес интегралымен анықталған $\Phi(z)$ бөлікті-аналитикалық функциясын енгізейік.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt \qquad (54)$$

Сохоцский-Племель формуласы $|x| < a$ үшін

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = \varphi(x)$$

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt \qquad (55)$$

Бірақ (53) интегралдық теңдеуден (55) екінші формуласы

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = -if(x), |x| < a$$

теңдігін береді және

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{[-if(t)]}{X^{+}(t)(t-z)}dt + cX(z)$$

$$\Phi(z) = -\frac{X(z)}{2\pi}\int_{L}\frac{f(t)}{X^{+}(t)(t-z)}dt + cX(z)$$

L-да $\Phi(z)$ функциясының шектік мәні бар

$$\Phi^{\pm}(x) = -\frac{X^{\pm}(x)}{2\pi}\int_L \frac{f(t)}{X^{+}(t)(t-x)}dt + cX^{\pm}(x), \left(|x| < a\right)$$

жоғарыдағы белгі L кесуінің жоғарғы бөлігіндегі $\Phi^{+}(x)$ шектік мәнін, ал төмендегі белгі $\Phi^{-}(x)$ төменгі шектік мәні.

Бір жағынан 1-теңдігінен (55) теңдікті мына түрде аламыз.

$$\varphi(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = -\frac{X^{+}(x) - X^{-}(x)}{2\pi}\left[\int_L \frac{f(t)}{X^{+}(t)(t-x)}dt - 2\pi c\right], |x| < a$$

$X^{\pm}(x) = \pm 1/i\sqrt{a^2 - x^2}$ екендігін ескеріп, (55) теңдеуді

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}\left[\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} f(t)dt + c_1\right]$$

түрде жазамыз. c_1 тұрақтысы шешімнің физикалық табиғатына баланысты болатын қосымша шартпен анықталады.